* المعادلات التفاضلية من المراتب العليا:

- المعادلة التفاضلية من المرتبة n تسمى خطية بالنسبة للمتغير y إذا كان $y^{(n)}, \dots, y'', y', y$ من الدرجة الأولى، وتكتب على النحو التالي:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n y = f(x)$$

حيث $a_0 \neq 0$ فإذا كانت $a_0, a_1, \dots, a_n$ جميعها قيم ثابتة تسمى المعادلة خطية ذات دلائل ثابتة أما إذا كانت أحد الأمثال على الأقل مرتبط بـ x فتسمى المعادلة ذات الأمثال لا غير الثابتية (متغيرة)

← وتكون المعادلة السابقة متجانسة عندما $f(x) = 0$ أي أن:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

أما إذا كان $f(x) \neq 0$ فإن المعادلة غير متجانسة.

تعريف: يعرف المؤثر التفاضلي $D = \frac{d}{dx}$ المشتق الأول بالنسبة للمتحول x.

ويكون عندئذ $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$, $D^3 = \frac{d^3}{dx^3}$

$De^{5x} = 5e^{5x}$, $D^2 = 25e^{5x}$

فعلى سبيل المثال :

← لنفرض الآن أنه لدينا معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الثانية ذات الشكل:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (1)$$

نظرية إذا كان كل من y_1, y_2 حل خاص للمعادلة (1) فإن

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

حل أيضاً للمعادلة (1) حيث c_1 و c_2 ثابتان اختياريان

تعريف: نقول عن y_1 و y_2 بأنهما حلين مستقلين خطياً للمعادلة (1) إذا كان $\frac{y_2}{y_1} \neq c$ أي أن $y_2 \neq c y_1$

كما نقول عن y_1, y_2 حلين للمعادلة (1) مرتبطان خطياً إذا كان $\frac{y_2}{y_1} = c$ أي أن $y_2 = c y_1$

تعريف:

إذا كان $y_1(x)$ و $y_2(x)$ تابعين قابلين للاشتقاق في مناطق تعريفهما فإننا نعرف كما يلي:

$$W\{y_1(x), y_2(x)\} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

← $y_1(x), y_2(x)$ مستقلان خطياً إذا وفقط إذا

$$W\{y_1(x), y_2(x)\} \neq 0$$

$y_1(x), y_2(x)$ مرتبطين خطياً إذا وفقط إذا

$$W\{y_1(x), y_2(x)\} = 0$$

مثال: بين فيما إذا كانت كل مجموعة من التوابع الآتية مستقلة أم مرتبطة:

1) e^{x} , e^{-x} 2) $1, x, x^2$ 3) e^{x} , $2e^{x}$, x

الحل: نوجد محدد كل مجموعة:

1) $W\{e^{x}, e^{-x}\} = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1-1=-2 \neq 0$

مستقلين خطياً

2) $W\{1, x, x^2\} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ مستقلين خطياً

3) $W\{e^{x}, 2e^{x}, x\} = \begin{vmatrix} e^{x} & 2e^{x} & x \\ e^{x} & 2e^{x} & 1 \\ e^{x} & 2e^{x} & 0 \end{vmatrix} = 0$ مرتبطين خطياً

ملاحظة (تذكرة): إذا تناسب سطرين أو عمودين في المحدد ⟸
قيمة المحدد = 0

تعريف: الحل العام:

إذا كان y_1 , y_2 حلين مستقلين للمعادلة 1) (ذكرت سابقاً) فإن الحل العام
$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ تمثل الحل العام للمعادلة 1) حيث c_1 , c_2
ثابتان اختياريان.

* إيجاد الحل العام للمعادلة الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية وذات الأمثال الثابتة :

. لدينا المعادلة $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ حيث $a_1 a_2$ ثابتان عدديان وكل هذه المعادلة تحدد حلين خاصين مستقلين خطياً ، ومن أجل ذلك نفرض أن $y = e^{\lambda x}$ حلاً للمعادلة حيث λ عدد ثابت والآن يمكن أن نكتب المعادلة على النحو التالي :

$$(D^2 + a_1 D + a_2) y = 0$$

(حيث كتبنا المعادلة التفاضلية بدلالة مؤثر تفاضلي D).

ولكن : $Dy = D e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$ ، $D^2 y = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$\boxed{(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2) e^{\lambda x} = 0} : e^{\lambda x} \neq 0$$

وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المميزة

ويمكن الحصول على هذه المعادلة المميزة مباشرة من المعادلة التفاضلية الأصلية بدلالة المؤثر التفاضلي D وذلك بوضع λ بدلاً من D .

. وهذه المعادلة المميزة عبارة عن معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ λ وبالتالي لها جذران : λ_1 , λ_2

$$\lambda_1 , \lambda_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

وهنا نميز الحالات الثلاث :

1) $\Delta > 0$ لدينا $\lambda_1 \neq \lambda_2$ حقيقيان مختلفان .

2) $\Delta = 0$ $\lambda_2 = \lambda_1$ حل مضاعف حيث λ_1 , λ_2 حقيقيان متساويان

3) $\Delta < 0$ لدينا جذران عقديان (مركبان)

والآن ندرس كل حالة على حدة :

الحالة الأولى: جذري المعادلة المميزة حقيقيان ومختلفان :

أي أن $\lambda_1 \neq \lambda_2$ بمعنى أن الحل الناتج عنهما $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

هما حلان خاصان للمعادلة ومستقلان خطياً (لأن نسبة أحدهما إلى الآخر لا يساوي الثابت) وبالتالي فإن الحل العام وفق التعريف السابق يعطى على الشكل:

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ حيث c_1 و c_2 ثابتان اختياريان .

مثال:

مثال: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية : $y'' + 3y' - 4y = 0$

الحل: نكتب المعادلة بدلالة D فنصبح $(D^2 + 3D - 4)y = 0$

بفرض $y = e^{\lambda x}$ فنجد :

$D.y = \lambda e^{\lambda x}$ و $D^2 = \lambda^2 . e^{\lambda x}$

$(\lambda^2 + 3\lambda - 4)e^{\lambda x} = 0$: $e^{\lambda x} \neq 0$

$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4 , \lambda_2 = +1$

إذاً : $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = e^{x}$

فيكون الحل العام : $\boxed{y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x}}$: c_1, c_2 ثابتان اختياريان

الحالة الثانية: في حال جذري المعادلة المميزة حقيقيان متساويان :

أي $\lambda_1 = \lambda_2$ ومنه ينتج : $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ و $y_2 = e^{\lambda_2 x}$

حيث أن الحل الأول مرتبط بالحل الثاني ، لهذا نبحث عن حل آخر y_2

غير مرتبط بالحل $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ وقد ثبت أن $y_2 = x e^{\lambda_1 x}$ تمثل حلاً

للمعادلة وغير مرتبط بالحل الأول y_1 وعليه فإن الحل العام يعطى بالشكل :

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$

حيث $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

مثال: حل المعادلة التفاضلية:

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

الحل: نكتب المعادلة بدلالة D:

$$D^2 - 4D + 4 = 0$$

نفرض أن: $y = e^{\lambda x}$

$$D = \lambda e^{\lambda x} \text{ , } D^2 = \lambda^2 e^{\lambda x} \text{ , } (\lambda^2 - 4\lambda + 4) e^{\lambda x} = 0$$

حيث أن $e^{\lambda x} \neq 0$

حل مضاعف

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

$$y_1 = e^{2x} \text{ , } y_2 = x e^{2x} \text{ , } y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} \Rightarrow y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$$

حيث c_1 ، c_2 ثابتان اختياريان

الحالة الثالثة: جذري المعادلة المميزة مركبين (عقديان):

- إذا كان أحد الجذور للمعادلة عدد عقدي $\lambda_1 = \alpha + i\beta$

حيث أن $i = \sqrt{-1}$ فإن الجذر الآخر λ_2 يكون $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (مرافق)

حيث $\beta \neq 0$ أي $\lambda_1 \neq \lambda_2$ وعندئذ فالحل العام:

$$y = A_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

تذكرة: علاقة أولير:
$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$y = e^{\alpha x}\left[A_1 e^{i\beta x} + A_2 e^{-i\beta x}\right]$$

$$y = e^{\alpha x}\left[(A_1 + A_2)\cos\beta x + i(A_1 - A_2)\sin\beta x\right]$$

$$y = e^{\alpha x}\left[c_1 \cos\beta + c_2 \sin\beta x\right]$$

حيث $c_1 = A_1 + A_2$ و $c_2 = i(A_1 - A_2)$

…جد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$y'' + 2y' + 5y = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow$

$(\lambda^2 + 2\lambda + 5) e^{\lambda x} = 0 \; ; \quad e^{\lambda x} \neq 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-16} = 4i$

$\lambda_1 = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i \; , \quad \lambda_2 = -1 - 2i$

$y_1 = A_1 e^{(-1+2i)x} + A_2 e^{(-1-2i)x}$

$y_1 = e^{-x} [C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x]$

انتهت المحاضرة